OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de 1997.

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cdot sen(2x)$

(a) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

¿ Que dice el teorema fundamental del cálculo integral sobre la función F?

(b) Halla $F(\pi)$

Solución

(a)

El teorema fundamental del calculo integral nos dice que si f(x) es continua en un cerrado [a,b], entonces la función $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, es derivable y que su derivada es $F'(x) = f(x)$

(b)

$F(\pi)=\int_0^\pi f(t)dt$

Antes tenemos que resolver una integral por partes

$I = \int e^x.sen(2x)\,dx = e^x sen(2x) - \int e^x.2cos(2x)dx = e^x sen(2x) – 2I_1$

Donde $u = sen(2x)$, $dv = e^x dx$, con lo cual $du = 2cos(2x)$, $v = e^x$

Análogamente para I_1, tomando $u = cos(2x)$, $dv = e^x dx$, con lo cual $du = -2sen(2x)$, $v = e^x$, resulta

$I_1 = \int e^x.cos(2x)\,dx = e^x cos(2x) + \int e^x.2sen(2x)dx = e^x cos(2x) + 2I$

Tenemos

$I = e^x sen(2x) – 2I_1 = e^x sen(2x) –2(e^x cos(2x) + 2I) = e^x sen(2x) –2e^x cos(2x) – 4I$. Luego

$5I = e^x sen(2x) –2e^x cos(2x)$, de donde

$I = [e^x sen(2x) –2e^x cos(2x)] / 5$. Por tanto

$$F(\pi)=\int_0^\pi f(x)dx=\left[\frac{e^x sen(2x)-2e^x cos(2x)}{5}\right]_0^\pi = [(e^\pi.0 – 2e^\pi.(1))/5 - (e^0.0 – 2e^0.1)/5] = 2/5(-e^\pi + 1)$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de 1997.

Desde la Tierra, que suponemos situada en el origen de coordenadas del plano, se observa un objeto que sigue una trayectoria de ecuación $xy = 16$ (donde las distancias se miden en años-luz). ¿ Cuales son las coordenadas del punto de la trayectoria cuya distancia a la Tierra es mínima y cuánto vale dicha distancia?

Solución

La función es $x.y = 16$, de donde $y = 16/x$

Un punto genérico es $X(x,y) = X(x, 16/x)$

$O(0,0)$

La distancia es $d(O,X) = |\mathbf{OX}| = [x^2 + 16^2/x^2]^{(1/2)}$

Esta es la función que tenemos que hacer mínima. $d'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^4+16^2}{x^2}}}.\left(\dfrac{4x^3.x^2-(x^4+16^2).2x}{x^4}\right)$

Haciendo $d' = 0$, tenemos $4x^5 – 2x(x^4 + 16^2) = 2x(x^4 – 256) = 0$

De donde obtenemos como soluciones $x = 0$, y $x= (256)^{(1/4)} = 4$

El mínimo se obtiene para $x = 4$, y la distancia pedida en años luz es $d(4) = [2*256/16]^{(1/2)} = \sqrt{32}$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de 1997.

Sin desarrollar el determinante, demuestra que $\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$

Enuncia las propiedades de los determinantes que utilices.

Solución

Para empezar a la tercera fila le sumo la primera y la segunda

$$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ 3a+3b & 3a+3b & 3a+3b \end{vmatrix} =$$

saco factor común 3ª + 3b que se repite en la última fila

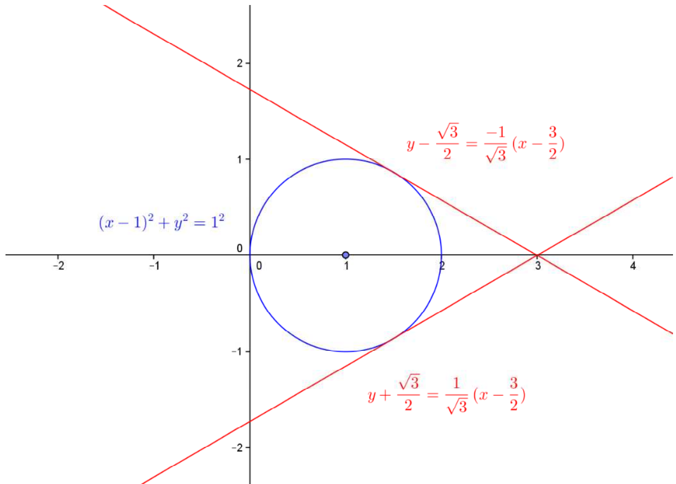
$$=(3a+3b)\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3a+3b)\begin{vmatrix} a+2b & -2b & -b \\ a+b & b & -b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(3a+3b).b.b\begin{vmatrix} a+2b & -2 & -1 \\ a+b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(3a+3b)b^2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$= (3a + 3b).b^2 .3 = 9.b^2(a + b)$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de 1997.

Una circunferencia tiene por centro el punto C = (1,0) y su diámetro es 2. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto de abcisa x = 3/2 y ordenada positiva.

Solución



La ecuación de la circunferencia es $(x – 1)^2 + y^2 = 1^2$

La ecuación de la recta tangente en x = 3/2, es y – f(3/2) = f ' (3/2).(x – 3/2)

Hallamos la derivada implícita

2(x –1) + 2y.y ' = 0, de donde y ' = (1 – x) / y .

sustituyendo x = 3/2 en la circunferencia tenemos

$(3/2 - 1)^2 + y^2 = 1$, y operando nos sale $y = \pm\sqrt{3}/2$, por tanto para la abcisa x = 3/2, tenemos dos ordenadas en la circunferencia $y = +\sqrt{3}/2$ e $y = -\sqrt{3}/2$, por tanto tenemos dos rectas tangentes

$y – (+\sqrt{3}/2) = (-1/\sqrt{3}). (x – 3/2)$ e $y – (-\sqrt{3}/2) = (-1/ -\sqrt{3}). (x – 3/2)$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de 1997.

(a) Determina razonadamente la expresión algebraica de una función continua $f : \Re \rightarrow \Re$ que cumpla las condiciones siguientes f(3) = 9/2, $f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<3, \\ x & si \quad x>3 \end{cases}$

(b)Razona si la función f es derivable en el punto x = 3.

(c) Esboza la gráfica de esta función f.

Solución

(a)

Aplicamos el teorema fundamental del calculo integral

$f(3) = 9/2, \quad f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<3, \\ x & si \quad x>3 \end{cases} \quad f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases} \int 0dx & si \quad x<3 \\ \int xdx & si \quad x\geq 3 \end{cases}=\begin{cases} K & si \quad x<3 \\ \frac{x^2}{2}+M & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

De f(3) = 9/2, tenemos f(3) = 9/2 + M = 9/2, por tanto M = 0

Por otro lado al ser continua

$\lim_{x\rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 9/2$

Sustituyendo nos queda K = 9/2, por tanto la función pedida es $f(x)=\begin{cases} 9/2 & si \quad x<3 \\ \frac{x^2}{2} & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

(b)

Para que sea derivable en x = 3, tiene que ser $f'(3^+) = f'(3^-)$

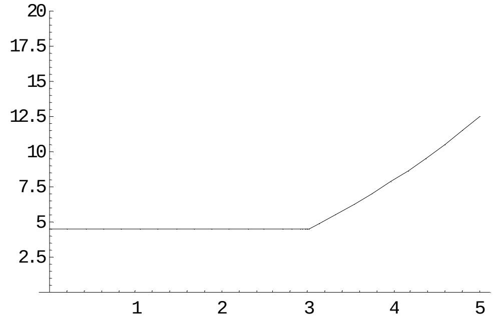
$f'(3^+) = \lim_{x\rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x\rightarrow 3^+} (x) = 3$

$f'(3^-) = \lim_{x\rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x\rightarrow 3^-} (0) = 0$

Como $f'(3^+) \neq f'(3^-)$, no existe $f'(3)$

(c)

La gráfica de la función es una recta paralela al eje de abcisas de altura 9/2 por un lado y por el otro en una parábola parecida a x^2 pero un poco más abierta.



Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de 1997.

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = x\, e^{x - x.x}$.

(a) Halla los máximos y mínimos relativos de esta función

(b) Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$

Solución

(a)

$f(x) = x\, e^{x - x.x}$.

Estudiamos su primera derivada, de donde obtendremos crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

$f'(x) = 1.\, e^{x - x.x}. + x\, e^{x - x.x}(1 - 2x). = e^{x - x.x}. .(1 + x - 2x^2)$

Igualando a cero $f'(x)$, como la exponencial nunca es cero obtenemos $2x^2 - x - 1 = 0$, y nos da como soluciones $x = 1$ y $x = -1/2$, que serán los posibles máximos y mínimos

Como $f'(x) < 0$ si $x < -1/2$, la función $f(x)$ es decreciente si $x < -1/2$

Como $f'(x) > 0$ si $-1/2 < x < 1$, la función $f(x)$ es creciente si $-1/2 < x < 1$

Como $f'(x) < 0$ si $x > 1$, la función $f(x)$ es decreciente si $x > 1$

Por definición en $x = -1/2$ hay un mínimo y en $x = 1$ hay un máximo

(b)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x.\, e^{-(x.x - x)} = = \lim_{x \to \infty} [\, x / e^{(x.x - x)}\,] = (\infty / \infty)$ aplicándole la Regla de L¨Hôpital tenemos

$\lim_{x \to \infty} [\, x / e^{(x.x - x)}\,] = \lim_{x \to \infty} [\, 1 / e^{(x.x - x)} .(2x - 1)] = 1 / \infty = 0$.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de 1997.

(a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿ para que valores del parámetro b no tiene inversa la matriz A? Justifica la respuesta

(b) Si existe, calcula la inversa para b = - 1.

Solución

(a)

La matriz A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1 - 2b) = 0$. Por tanto dándole a b el valor ½ , la matriz A no tiene inversa.

(b)

Si b = -1, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = 1.(1 + 2) = 3$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de 1997.

Calcula razonadamente y dibuja el lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican la siguiente propiedad: “ El triángulo APB de vértices A = (-7, 0), P y B = (7, 0) es rectángulo en P.”

Solución

Si el triángulo APB es rectángulo en P entones los vectores **PA** y **PB** son perpendiculares, es decir su producto escalar es cero **PA•PB** = 0

PA = (-7-x, -y); **PB** = (7-x, -y)

PA•PB = 0 = (-7-x)(7-x) + (-y)(-y) = -49 + x^2 + y^2 = 0, es decir x^2 + y^2 = 49 = 7^2, lo cual es una circunferencia de centro (0,0) y radio 7